

Zusammenfassung

Suchen



2.1 Einführung



In den Bereichen Investition und Finanzierung geht es, wie wir bereits in den ersten Kapiteln erläutert haben, immer um Zahlungen (Geldflüsse). Anhand von zukünftigen Zahlungen sollen Projekte/ Investitionen bewertet und miteinander verglichen werden, was anschließend zu den „richtigen“/ „besten“ Investitions- und Finanzierungs-Entscheidungen führen soll.

Hierbei gibt es jedoch ein Problem!

Zahlungen, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten erfolgen, können nicht direkt miteinander verrechnet werden!

Doch weshalb ist das so?

Stellt euch vor, ihr habt die Wahl zwischen:

I. 1000€ jetzt sofort erhalten oder

II. 1000€ in 10 Jahren erhalten.

Da merkt man direkt, dass man intuitiv die erste Option vorziehen würde.

Aber warum ist das so? Warum ist es weniger attraktiv, wenn wir Geld erst später erhalten und attraktiver, wenn wir Geld schon früher erhalten?

Das liegt daran, dass es Rendite gibt. Wenn ich Geld früher erhalte, dann kann ich das Geld in eine Anlage (Sparbuch, Immobilie, Unternehmensgründung...) investieren und habe am Ende des Anlagezeitraums normalerweise mehr Geld als am Anfang.

Wenn ich also die 1000€ sofort bekomme, dann kann ich sie anlegen und erhalte jedes Jahr Rendite auf mein Kapital. Wenn ich die 1000€ erst in 10 Jahren bekomme, dann habe ich diese Möglichkeit nicht. Ich habe dann sozusagen auf die Renditechancen der letzten 10 Jahre verzichtet/ diese „verloren“.

Merke: Zeitwert des Geldes

Den Umstand, dass Geld zu unterschiedlichen Zeitpunkten einen unterschiedlichen Wert hat, nennt man „Zeitwert des Geldes“.

Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten können daher nicht direkt miteinander verglichen oder aufaddiert werden, sondern müssen zuerst **auf einen einheitlichen Zeitpunkt bezogen** werden.

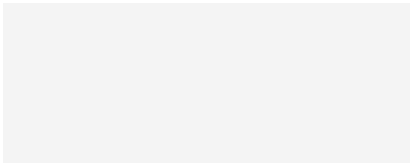
Die Finanzmathematik stellt uns Methoden zur Verfügung, die es ermöglichen die Zahlungen auf einen einheitlichen Zeitpunkt zu beziehen, was schlussendlich einen Vergleich ermöglicht und sowohl die unterschiedlichen Fälligkeitszeitpunkte als auch die daraus resultierenden Zinseffekte berücksichtigt. Um diese Methoden in den nachfolgenden Kapiteln richtig anwenden zu können, ist es besonders wichtig immer auf die Zeitpunkte zu achten und diese richtig zu interpretieren, da wir ja eben gesehen haben, wie ausschlaggebend die einzelnen Zeitpunkte sind.

[VIDEO ANZEIGEN](#)[✦ Ai fragen](#)[✓ | Tutor/in fragen](#)

✓

[< Vorheriges Kapitel](#)[Nächstes Kapitel >](#)

3 Karteikarten in diesem Kapitel



Zusammenfassung

Suchen



2.3 Endwert



Zusammenfassung:

1 Grundlagen

- 1.1 Zahlungsströme
- 1.2 Zeitrechnung
- 1.3 Typische Finanzinstrumente

2 Zeitwert des Geldes

- 2.1 Einführung
- 2.2 Zinsen
- 2.3 Endwert
- 2.4 Barwert
- 2.5 Unterjährige Verzinsung
- 2.6 Kapitalwert

3 Werte von Renten

4 Renditerechnung

5 Anhang

- 5.1 Cheatsheet

[Log out](#)

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, wie wir die Auswirkung einer einzelnen Zinszahlung berechnen können. Nun beschäftigen wir uns mit der Frage, wie sich ein Vermögen im Laufe **mehrerer Zinsperioden** entwickelt.

D.h. wir legen einen Geldbetrag über einen längeren Zeitraum an und wollen berechnen, wie groß das Kapital am Ende dieses Zeitraums sein wird. Diesen gesuchten Wert nennen wir *Endwert*.

Wichtig ist dabei zunächst, was mit den Zinsen passiert:

Definition: ausschüttend/ thesaurierend

Bei manchen Anlageformen werden die Zinsen zum angelegten Vermögen hinzugefügt. Solche Anlagen nennt man „thesaurierend“. Mit jeder Zinsperiode wächst also das Sparguthaben und damit auch die Zinsen. Der Anleger bekommt sogenannte Zinseszinsen.

Andere Formulierungen sind: „Die Zinsen werden kapitalisiert“, „geometrische Verzinsung“, „compound interest“

Im Gegensatz dazu können Zinsen auch ausgeschüttet werden. D.h. das Sparguthaben bleibt gleich und der Anleger erhält in jeder Zinsperiode eine Zahlung in gleicher Höhe.

Man spricht bei ausschüttenden Anlagen auch von „einfacher Verzinsung“.

In den meisten Aufgaben gehen wir von geometrischer Verzinsung aus. Es gibt ausschüttende Anlageprodukte, z.B. Standardbonds oder Aktien, aber theoretisch kann der Anleger jede Zinszahlung wieder investieren (in gleiche oder andere Anlagen) und damit vom Zinseszinsseffekt profitieren.

VIDEO ANZEIGEN

Formel: Endwert

Gegeben sind ein Startkapital und ein Zinssatz. Gesucht ist das Kapital, das sich bei geometrischer Verzinsung über t Perioden ergibt. Dieses berechnen wir so:

$$\begin{aligned} K_t &= K_0 \cdot q^t \\ &= K_0 \cdot (1 + r)^t \end{aligned}$$

Beispiel

Du bringst 2000€ zur Bank, wo du 12 Jahre lang 2% Zinsen p.a. bekommst. Welchen Endwert hast du am Ende dieser Zeit?

$$\begin{aligned} K_{12} &= K_0 \cdot q^{12} \\ &= 2000€ \cdot 1,02^{12} \\ &\approx 2536,48€ \end{aligned}$$

VIDEO ANZEIGEN

Meistens sind Dauer und Verzinsung einer Anlage gegeben und der Endwert ist gesucht. Für diese Fälle ist die obige Formel optimal. Es kann aber auch vorkommen, dass der Endwert bekannt ist und der Zinssatz oder die Anlagedauer berechnet werden soll. Dann muss die Formel entsprechend umgestellt werden.

Beispiel

Du legst einen Geldbetrag zu einem festen Zins an. Nach 16 Jahren hat er sich verdoppelt. Wie groß ist der Zinssatz?

Lösung:

Endwertformel:

$$K_T = K_0 \cdot q^T$$

Verdopplung des Kapitals:

$$K_T = 2 \cdot K_0$$

gleichsetzen und umstellen:

$$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot q^T \quad | : K_0$$

$$\Leftrightarrow 2 = q^T \quad | T = 16$$

$$\Rightarrow 2 = q^{16}$$

$$\Leftrightarrow q = \sqrt[16]{2}$$

$$\Leftrightarrow r = q - 1$$

$$= \sqrt[16]{2} - 1$$

$$\approx 4,43\%$$

VIDEO ANZEIGEN

Beispiel

Du legst 100000€ zu 6% Zinsen p.a. an. Wann wird dein Kapital auf 150000€ wachsen?

Lösung:

Endwertformel:

$$K_T = K_0 \cdot q^t$$

$$\Rightarrow 150000\text{€} = 100000\text{€} \cdot 1,06^t \quad | : 100000\text{€}$$

$$\Leftrightarrow 1,5 = 1,06^t \quad | \ln(\quad)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1,5) = \ln(1,06^t) \quad | \ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1,5) = t \cdot \ln(1,06) \quad | : \ln(1,06)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,06)}$$

$$\approx 6,96$$

D.h. bei 6% Zinsen dauert es 6,96 Jahre, bis ein Vermögen von 100000€ auf 150000€ wächst.

VIDEO ANZEIGEN

Merke: Erwarteter Endwert bei unsicheren Zahlungen

Sehr selten kommen hier in FIMA Aufgaben vor, in denen die zukünftigen Zahlungen nicht sicher sind, sondern mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten eintreten. In diesen Aufgaben berechnet ihr die Endwerte für die verschiedenen Szenarien zuerst separat. Dann könnt ihr den sogenannten **Erwartungswert** des Endwerts folgendermaßen berechnen:

$$E(K_T) = p_1 \cdot K_{T=1} + p_2 \cdot K_{T=2} + \dots + p_n \cdot K_{T=n}$$

$$E(K_T) = p_1 \cdot K_{T,1} + p_2 \cdot K_{T,2} + p_3 \cdot K_{T,3} + \dots$$

$p_1, p_2, \dots$ sind dabei die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die jeweiligen Szenarien bzw. Endwerte $K_{T,1}, K_{T,2}, \dots$ eintreten. Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist immer 1, d.h. der Erwartungswert ist der gewichtete Durchschnitt aller möglichen Endwerte.

Beispiel

Du willst 8000€ 5 Jahre lang in einen thesaurierenden Aktienfonds anlegen. Du rechnest mit 2 möglichen Wertentwicklungen:

- Bei guter Konjunktur wird der Fonds um 7% p.a. steigen
- Bei schlechter Konjunktur wird der Fonds um durchschnittlich 2% p.a. fallen.

Du nimmst an, dass die Konjunktur mit 70% Wahrscheinlichkeit in den nächsten 5 Jahren gut verlaufen wird und mit 30% Wahrscheinlichkeit in den nächsten 5 Jahren schlecht verlaufen wird.

Aufgabe: Welches Vermögen erwartest du nach 5 Jahren?

Endwert bei guter Konjunktur:

$$\begin{aligned} K_{T,1} &= K_0 \cdot q_1^T \\ &= 8000\text{€} \cdot 1,07^5 \\ &\approx 11220,41\text{€} \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit für gute Konjunktur:

$$\begin{aligned} p_1 &= 70\% \\ &= 0,7 \end{aligned}$$

Endwert bei schlechter Konjunktur:

$$\begin{aligned} K_{T,2} &= K_0 \cdot q_2^T \\ &= 8000\text{€} \cdot 0,98^5 \\ &\approx 7231,37\text{€} \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit für schlechte Konjunktur:

$$\begin{aligned} p_2 &= 30\% \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

Erwartungswert des Endwerts:

$$\begin{aligned} K_T &= p_1 \cdot K_{T,1} + p_2 \cdot K_{T,2} \\ &= 0,7 \cdot 11220,47\text{€} + 0,3 \cdot 7231,37\text{€} \\ &\approx 10023,70\text{€} \end{aligned}$$

Antwort: Der erwartete Endwert der Anlage, d.h. der gewichtete Durchschnitt zwischen den beiden Szenarien, beträgt 10023,70€.

VIDEO ANZEIGEN

✦ Ai fragen

▼ | 🗨 Tutor/in fragen



< Vorheriges Kapitel

Nächstes Kapitel >

6 Karteikarten in diesem Kapitel

6

Jetzt lernen

Zusammenfassung

Suchen



Zusammenfassung:

1 Grundlagen

1.1 Zahlungsströme

1.2 Zeitrechnung

1.3 Typische Finanzinstrumente

2 Zeitwert des Geldes

2.1 Einführung

2.2 Zinsen

2.3 Endwert

2.4 Barwert

2.5 Unterjährige Verzinsung

2.6 Kapitalwert

3 Werte von Renten

4 Renditerechnung

5 Anhang

5.1 Cheatsheet



Log out

2.5 Unterjährige Verzinsung



Bisher haben wir Zinsen betrachtet, die einmal pro Periode (üblicherweise pro Jahr) auftreten. Oft variieren die Zinsperioden jedoch oder ein Betrag wird nicht für eine ganze Anzahl von Jahren angelegt, sondern z.B. für zweieinhalb Jahre oder nur für wenige Monate. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Zinsperioden unterschiedlicher Länge. Wenn die Zinsperiode kürzer als ein Jahr ist (d.h. wenn beispielsweise jeden Monat Zinsen gezahlt werden), spricht man von unterjähriger Verzinsung. Wir gehen von geometrischer Verzinsung aus, d.h. es gibt auch innerhalb eines Jahres Zinseszinsen.

Beispiel

Eine Bank bietet an, angelegtes Geld zum **nominellen Zinssatz** von 8% p.a. zu verzinsen. Die Zinskapitalisierung soll dabei halbjährlich erfolgen. Das bedeutet, dass der nominelle Zins gleichmäßig auf die Zinsperioden (die Halbjahre) aufgeteilt wird und das angelegte Kapital mit jedem Halbjahr um 4% wächst. Bei Anlage von 1000€ ergibt sich daraus folgende Wertentwicklung (t in Monaten):

$$K_0 = 1000\text{€}$$

$$K_6 = K_0 \cdot 1,04$$

$$= 1040\text{€}$$

$$K_{12} = K_6 \cdot 1,04$$

$$= 1081,60\text{€}$$

Nach einem Jahr ist das Vermögen also nicht um 8% gewachsen, sondern um 8,16%. Diese Zahl nennen wir „**effektiven Jahreszins**“ oder „äquivalenten Jahreszins“. Zum Vergleichen verschiedener Anlagemöglichkeiten ist der effektive Jahreszins meistens geeigneter als der nominelle, da er die tatsächliche Vermögensentwicklung besser widerspiegelt.

VIDEO ANZEIGEN

Notation: unterjährige Verzinsung

m Anzahl der Zinsperioden pro Jahr. Z.B. $m = 2$ im obigen Fall oder $m = 12$ bei monatlicher Verzinsung.

u nomineller Jahreszins, im vorigen Beispiel $u = 8\%$

$\frac{u}{m}$ unterjähriger Zinssatz, im Beispiel der halbjährliche Zinssatz $\frac{u}{m} = 4\%$

r_m effektiver Jahreszins, also der Prozentsatz, um den ein angelegter Betrag in einem Jahr wächst

q_m effektiver jährlicher Zinsfaktor, also der Faktor, um den ein angelegter Betrag in einem Jahr wächst

Wie wir in den letzten Kapiteln gesehen haben, wird der effektive Jahreszins auch oft als r bezeichnet und der zugehörige Zinsfaktor als q , also ohne den Index m . Das ist insbesondere in Aufgaben der Fall, wo unterjährige Verzinsung keine Rolle spielt. Grundsätzlich ist also r_m gleichbedeutend mit r und q_m gleichbedeutend mit q .

VIDEO ANZEIGEN

Formel: effektiver Jahreszins

Wir betrachten eine Anlage mit nominellem Jahreszins u und unterjähriger geometrischer Verzinsung mit m Zinsperioden pro Jahr. Dann lässt sich der effektive Jahreszins folgendermaßen berechnen:

$$q_m = \left(1 + \frac{u}{m}\right)^m$$

$$r_m = q_m - 1$$

$$= \left(1 + \frac{u}{m}\right)^m - 1$$

Beispiel

Du legst 20000€ bei einem nominellen Zinssatz von 6% p.a. an. Wie lauten die effektiven Jahreszinsen und welchen Endwert erreichst du nach 21 Monaten bei

- quartalsweiser Zinskapitalisierung?
- monatlicher Zinsgutschrift?

Lösung:

a) **Zeit in Quartalen:**

$$t = 7$$

Zinssatz pro Quartal:

$$\frac{u}{m} = \frac{0,06}{4}$$

$$= 0,015$$

effektiver Jahreszins:

$$r_m = \left(1 + \frac{u}{m}\right)^m - 1$$

$$= 1,015^4 - 1$$

$$\approx 6,14\%$$

allgemeine Formel für Endwert:

$$K_t = K_0 \cdot q^t$$

Endwert im unterjährigen Fall nach 7 Quartalen (= Zinsperioden):

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{u}{m}\right)^t$$

$$= 20000\text{€} \cdot (1 + 0,015)^7$$

$$\approx 22196,90\text{€}$$

b) Endwert und effektiver Jahreszins bei monatlicher Zinskapitalisierung:

$$t = 21 \text{ Monate}$$

$$\frac{u}{m} = \frac{0,06}{12}$$

$$= 0,005$$

$$r_m = \left(1 + \frac{u}{m}\right)^m - 1$$

$$= 1,005^{12} - 1$$

$$\approx 6,17\%$$

$$K_{21} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{u}{m}\right)^t$$

$$= 20000\text{€} \cdot 1,005^{21}$$

$$\approx 22208,40\text{€}$$

Ein Spezialfall der unterjährigen Verzinsung ist die kontinuierliche Verzinsung. Hierbei wächst das Guthaben nicht sprunghaft zu festen Zeitpunkten, sondern stetig (also eben kontinuierlich). Man kann sich auch vorstellen, dass das Jahr in unendlich viele unendlich kleine Zinsperioden aufgeteilt wird. Aus mathematischer Sicht entspricht die Wertentwicklung einer Exponentialfunktion.

Formel: kontinuierliche Verzinsung

Gegeben ist wieder ein nomineller Zinssatz u . Bei kontinuierlicher Verzinsung ergeben sich daraus diese effektiven Jahreszinsen:

$$q_m = e^u$$

$$r_m = e^u - 1$$

e ist dabei die Eulersche Zahl, eine Konstante in Höhe von etwa 2,7183.

Ein Geldbetrag K_0 , der zu diesem Zinssatz kontinuierlich verzinst wird, hat nach einer Zeitspanne von t Jahren folgenden Endwert:

$$K_t = K_0 \cdot (e^u)^t$$

$$= K_0 \cdot e^{ut}$$

t muss in diesem Fall keine ganze Zahl sein, sondern kann ein beliebiger Bruchteil eines Jahres oder mehrerer Jahre sein.

Beispiel

Gegeben sind wie im letzten Beispiel ein Startkapital von 20000€ und ein nomineller Jahreszins von 6%. Die Verzinsung soll jetzt kontinuierlich erfolgen. Berechne den Endwert nach 21 Monaten sowie den effektiven Jahreszins!

$$t = 1,75 \text{ Jahre}$$

$$r_m = e^u - 1$$

$$= e^{0,06} - 1$$

$$\approx 6,18\%$$

$$K_{1,75} = K_0 \cdot e^{ut}$$

$$= 20000\text{€} \cdot e^{0,06 \cdot 1,75}$$

$$\approx 22214,21\text{€}$$

VIDEO ANZEIGEN

Formel: unterjährige Verzinsung ohne Betrachtung nomineller Jahreszinsen

Unterjährige Verzinsung kommt manchmal auch in Aufgaben vor, wo „der“ Marktzins (also der effektive Jahreszins) gegeben ist. Der nominelle Jahreszins u spielt in diesen Aufgaben meistens keine Rolle. Es gelten dann folgende Zusammenhänge zwischen Periodenzins und effektivem Jahreszins:

$$q = q_p^m$$

$$q_p = \sqrt[m]{q}$$

$$= q^{\frac{1}{m}}$$

$$r = q - 1$$

$$= (1 + r_p)^m - 1$$

$$r_p = q_p - 1$$

$$= (1 + r)^{\frac{1}{m}} - 1$$

Die Variablen r_p und q_p stehen dabei für den äquivalenten effektiven Zinssatz bzw. Zinsfaktor je Periode. Für bestimmte Periodendauern werden anstelle von p (Periode) auch andere Indizes verwendet, z.B. d (Tag), Q (Quartal) oder H (Halbjahr).

Beispiel

Dein Mitbewohner überweist dir am 1. Tag jedes Monats 300€. Am 4. Tag jedes Monats brauchst du das Geld, um die Wohnungsmiete zu bezahlen. Wie viel Geld entgeht dir jeden Monat bei einem Marktzins von 4% p.a., wenn du die 300€ in der Zwischenzeit unter dem Kopfkissen versteckst, anstatt sie anzulegen?

Verwende die Konvention 30/360!

Lösung:

jährlicher Zinsfaktor:

$$q = 1,04$$

Zinsfaktor je Periode (Tag):

$$\begin{aligned} q_d &= q^{\frac{1}{m}} \\ &= 1,04^{\frac{1}{360}} \\ &\approx 1,0001 \end{aligned}$$

Endwert nach 3 Tagen:

$$\begin{aligned} K_t &= K_0 \cdot q_d^t \\ &= 300\text{€} \cdot \left(1,04^{\frac{1}{360}}\right)^3 \\ &= 300\text{€} \cdot 1,04^{\frac{3}{360}} \\ &\approx 300,10\text{€} \end{aligned}$$

Das Anlegen von 300€ für 3 Tage würde also einen Ertrag von 0,10€ einbringen.

VIDEO ANZEIGEN

✦ Ai fragen

✓ | 🗨 Tutor/in fragen

✓



< Vorheriges Kapitel

Nächstes Kapitel >

8 Karteikarten in diesem Kapitel

8

Jetzt lernen

Zusammenfassung

Suchen



2.2 Zinsen



Zusammenfassung:

1 Grundlagen

- 1.1 Zahlungsströme
- 1.2 Zeitrechnung
- 1.3 Typische Finanzinstrumente

2 Zeitwert des Geldes

- 2.1 Einführung
- 2.2 Zinsen
- 2.3 Endwert
- 2.4 Barwert
- 2.5 Unterjährige Verzinsung
- 2.6 Kapitalwert

3 Werte von Renten

4 Renditerechnung

5 Anhang

- 5.1 Cheatsheet


[Log out](#)

Zinsen sind Gebühren, die für die Überlassung von Geld bezahlt werden. Wer sich z.B. von einer Bank Geld leiht, muss dieses Geld nicht nur nach einer gewissen Zeit zurückzahlen, sondern darüber hinaus Zinsen bezahlen. Im Gegenzug dafür erhält der Kreditnehmer das Recht, vorübergehend über das geliehene Geld zu verfügen. Umgekehrt kann man einer Bank oder einer Regierung Geld leihen und dafür Zinsen erhalten.

Neben dem direkten Verleihen gibt es viele andere Möglichkeiten, Geld anzulegen, z.B. in Aktien, Immobilien oder Lottoscheine. Im Normalfall erhält der Anleger auch in diesen Fällen Rückflüsse, die aus finanzmathematischer Sicht als Zinsen aufgefasst werden.

Definition: Zinsen und verwandte Begriffe

Zinsen werden üblicherweise prozentual angegeben. Gängige Variablen in der Zinsrechnung sind:

r Zinssatz, z.B. 3% oder 0,03 (zum Rechnen ist die Schreibweise 0,03 geeigneter, in Texten die 3%). Der Zinssatz ist immer auf eine bestimmte Periodendauer (Zeitspanne) bezogen, üblicherweise ein Jahr. Ein Zinssatz von 3% pro Jahr bedeutet, dass ein angelegtes Guthaben im Laufe eines Jahres um 3% des Anfangswertes wächst. Er wird oft in der Schreibweise „3% p.a.“ angegeben. „p.a.“ steht für „per annum“, also jährlich.

$q = 1 + r$ Zinsfaktor oder Aufzinsfaktor, hier 1,03

K_0 Startkapital, d.h. der Betrag einer Anlage am Anfang des betrachteten Zeitraums

K_t angelegtes Kapital zum Zeitpunkt t , also nach t Zinsperioden

VIDEO ANZEIGEN

Beispiel

Du legst 4000€ zu einem jährlichen Zins von 4% bei deiner Bank an.

Wie groß ist dein Guthaben nach einem Jahr bzw. nach 2 Jahren?

Startkapital:

$$K_0 = 4000\text{€}$$

Zinsen und Guthaben nach einem Jahr:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 + \underbrace{K_0 \cdot r}_{\text{Zinsen des ersten Jahres}} \\ &= 4000\text{€} + 4000\text{€} \cdot 0,04 \\ &= 4000\text{€} + 160\text{€} \\ &= 4160\text{€} \end{aligned}$$

Zinsen und Guthaben nach 2 Jahren:

$$\begin{aligned} K_2 &= K_1 + K_1 \cdot r \\ &= 4160\text{€} + 4160\text{€} \cdot 0,04 \\ &= 4326,40\text{€} \end{aligned}$$

Kürzer ist meistens die Berechnung über den Zinsfaktor anstelle des Zinssatzes:

$$\begin{aligned}
 q &= 1 + r \\
 &= 1 + 0,04 \\
 &= 1,04 \\
 K_1 &= K_0 \cdot q \\
 &= 4000\text{€} \cdot 1,04 \\
 &= 4160\text{€} \\
 K_2 &= K_1 \cdot q \\
 &= \underbrace{K_0 \cdot q}_{=K_1} \cdot q \\
 &= 4000\text{€} \cdot 1,04^2 \\
 &= 4326,40\text{€}
 \end{aligned}$$

VIDEO ANZEIGEN

Begriffe: aufzinsen, abzinsen, diskontieren

Berechnungen wie im vorigen Beispiel werden auch als „Aufzinsen“ bezeichnet. D.h. gegeben sind ein Geldbetrag zu einem gewissen Zeitpunkt und ein Zinssatz. Gesucht ist der Wert, den dieser Geldbetrag **nach t Zinsperioden** haben wird. Dann sagen wir: „Der Geldbetrag wird um t Perioden **aufgezinst**“.

Umgekehrt können ein Zinssatz und ein **zukünftiger** Geldbetrag gegeben sein und wir können uns die Frage stellen, welchen Geldbetrag wir **heute anlegen müssen**, um nach einer gewissen Zeit den gewünschten Geldbetrag auf dem Konto zu haben. Für diese Berechnung müssen wir den zukünftigen Geldbetrag „**abzinsen**“ oder „**diskontieren**“.

VIDEO ANZEIGEN

Beispiel

Du willst in einem Jahr eine Reise antreten, die voraussichtlich 6000€ kosten wird.

Wie viel Geld musst du heute zu einem Zins von 2% p.a. anlegen, um nach einem Jahr über diese 6000€ verfügen zu können?

Zinsfaktor:

$$\begin{aligned}
 q &= 1 + r \\
 &= 1 + 0,02 \\
 &= 1,02
 \end{aligned}$$

Berechnung der Kapitalentwicklung:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= K_0 \cdot q \quad | : q \\
 \Leftrightarrow K_0 &= \frac{K_1}{q} \\
 &= \frac{6000\text{€}}{1,02} \\
 &\approx 5882,35\text{€}
 \end{aligned}$$

VIDEO ANZEIGEN

Merke: vereinfachende Annahmen in diesem Kurs

Wir gehen in diesem Kurs bzw. dieser Vorlesung von einem vereinfachten Finanzmarkt aus. Insbesondere nehmen wir an, dass es einen **üblichen Zinssatz** gibt, der allen Marktteilnehmern bekannt ist und sowohl **für Soll- als auch für Habenzinsen** gilt. Daher wird in vielen Aufgaben vom Marktzins oder von „dem Zinssatz“ die Rede sein. Wir werden so tun, als ob wir jederzeit Geld zu diesem Zinssatz leihen oder anlegen können.

Außerdem unterstellen wir, dass wir „in die **Zukunft sehen können**“, d.h. dass wir genau wissen, ob, wann und in welcher Höhe zukünftige Zahlungen erfolgen werden.

Diese Annahmen sind natürlich unrealistisch. Sie erleichtern aber das Verständnis der grundlegenden Konzepte.

VIDEO ANZEIGEN

✦ Ai fragen



🗨 Tutor/in fragen



< Vorheriges Kapitel

Nächstes Kapitel >

6 Karteikarten in diesem Kapitel

6

Jetzt lernen

Zusammenfassung

Suchen



2.6 Kapitalwert



Zusammenfassung:

1 Grundlagen

- 1.1 Zahlungsströme
- 1.2 Zeitrechnung
- 1.3 Typische Finanzinstrumente

2 Zeitwert des Geldes

- 2.1 Einführung
- 2.2 Zinsen
- 2.3 Endwert
- 2.4 Barwert
- 2.5 Unterjährige Verzinsung
- 2.6 Kapitalwert

3 Werte von Renten

4 Renditerechnung

5 Anhang

- 5.1 Cheatsheet


[Log out](#)

In den vorangegangenen Kapiteln ging es um Verzinsung, Barwert und Endwert einzelner Zahlungen. Jetzt wollen wir auch Werte von Zahlungsströmen, also von mehreren Zahlungen, bestimmen. Zur Erinnerung: Ein Zahlungsstrom ist eine Folge von Zahlungen, die zu verschiedenen Zeitpunkten erfolgen.

Um zu entscheiden, ob ein Zahlungsstrom vorteilhaft ist oder nicht, muss der „Wert“ dieses Zahlungsstroms ermittelt werden. Das ist nicht einfach die Summe der Zahlungen, denn wir haben ja gesehen, dass auch die Zeit und der Marktzins Einfluss auf den Wert einer Zahlung haben. Wir müssen also alle Zahlungen auf einen einheitlichen Zeitpunkt (typischerweise heute) umrechnen, um ihre Vorteilhaftigkeit zu beurteilen und mit anderen Zahlungen oder Zahlungsströmen zu vergleichen. D.h. wir brauchen die Barwerte der Zahlungen bzw. die Summe dieser Barwerte. Diese nennen wir auch Kapitalwert.

Formel: Kapitalwert

Gegeben seien Zeitpunkte $t_0, t_1, \dots, T$ und Zahlungen $z_{t_0}, z_{t_1}, \dots, z_T$. Außerdem seien der Marktzinssatz r und der entsprechende Zinsfaktor q bekannt. Der Kapitalwert des Zahlungsstroms ist dann die Summe der Barwerte der einzelnen Zahlungen zum heutigen Zeitpunkt:

$$KW_0 = \frac{z_{t_0}}{q^{t_0}} + \frac{z_{t_1}}{q^{t_1}} + \frac{z_{t_2}}{q^{t_2}} + \dots + \frac{z_T}{q^T}$$

VIDEO ANZEIGEN

Beispiel

Dein Unternehmen plant heute den Kauf einer Maschine für 40000€. Es wird erwartet, dass die Maschine jedes Jahr Produkte im Wert von 20000€ produziert, die jeweils am Ende eines Jahres verkauft werden können. Nach zweieinhalb Jahren muss die Maschine entsorgt werden, dann können noch einmal Produkte für 10000€ verkauft werden.

Welchen Wert hat die Investition heute, wenn das Unternehmen mit einem Zinssatz von 9% p.a. kalkuliert?

Lösung:

Zeitpunkte der Zahlungen in Jahren:

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 2$$

$$t_3 = 2,5$$

Zahlungsstrom:

$$z_{t_0} = z_0 = -40000\text{€}$$

$$z_{t_1} = z_1 = 20000\text{€}$$

$$z_{t_2} = z_2 = 20000\text{€}$$

$$z_{t_3} = z_{2,5} = 10000\text{€}$$

Kapitalwert:

$$\begin{aligned} KW_0 &= \frac{z_{t_0}}{q^{t_0}} + \frac{z_{t_1}}{q^{t_1}} + \frac{z_{t_2}}{q^{t_2}} + \frac{z_{t_3}}{q^{t_3}} \\ &= \frac{z_0}{q^0} + \frac{z_1}{q^1} + \frac{z_2}{q^2} + \frac{z_{2,5}}{q^{2,5}} \end{aligned}$$

$$= \frac{-40000\text{€}}{1,09^0} + \frac{20000\text{€}}{1,09^1} + \frac{20000\text{€}}{1,09^2} + \frac{10000\text{€}}{1,09^{2,5}}$$

$$\approx 3244,06\text{€}$$

VIDEO ANZEIGEN

Was fängt man nun mit diesem Ergebnis an, wenn man den Kapitalwert ausgerechnet hat? Es gibt eine sehr einfache Entscheidungsregel, mit der man durch den Kapitalwert entscheiden kann, ob man ein Projekt (oder den Kauf einer Maschine oder sonstiges) durchführen sollte oder nicht:

Regel: Kapitalwertmethode

Die Entscheidungsregeln der Kapitalwertmethode lauten folgendermaßen:

Vorteilhaftigkeitsentscheidung:

- Wenn Kapitalwert $> 0 \rightarrow$ Durchführen
- Wenn Kapitalwert $= 0 \rightarrow$ Indifferent
- Wenn Kapitalwert $< 0 \rightarrow$ Nicht durchführen

Ein positiver Kapitalwert bedeutet, dass man mit der Durchführung des Projekts sein Vermögen erhöht, also sollte man jedes Projekt mit positivem Kapitalwert durchführen

Wahlentscheidung:

Wenn man zwischen mehreren Projekten entscheiden muss und nur ein Projekt durchführen kann, sollte man das Projekt mit dem größten Kapitalwert durchführen.

VIDEO ANZEIGEN

Merke: Interpretation des Kapitalwerts/NPV

Was sagt uns nun ein Kapitalwert aus? Was bedeuten zum Beispiel die 3244,06 im Beispiel von oben?

$\rightarrow$ Der Kapitalwert eines Projekts ist der Betrag, den ich **heute** zusätzlich konsumieren/ausgeben kann, wenn ich das Projekt durchführe.

Das ist gar nicht so leicht zu verstehen, deshalb schauen wir uns das am Beispiel von oben an:

Die Cashflows des Projekts waren folgendermaßen:

$t = 0$	-40000€
$t = 1$	20000€
$t = 2$	20000€
$t = 2,5$	10000€

Zinssatz: $r = 0,09$

Der Kapitalwert war 3244,06. Was bedeutet das nun?

- Wir können heute einen Kredit von der Bank nehmen in Höhe von $40000\text{€} + 3244,06\text{€} = 43244,06\text{€}$
- 40000€ davon investieren wir in das Projekt
- 3244,06€ können wir ausgeben/konsumieren, wie wir wollen
- Unsere Schuld bei der Bank wird in einem Jahr angewachsen sein auf $43244,06 \times 1,09 = 47136,03\text{€}$
- Die 20000€, die unser Projekt in einem Jahr einbringt, zahlen wir an die Bank. Die Schuld hat dann noch eine Höhe von $47136,03 - 20000 = 27136,03$
- Diese Schuld wird ein Jahr später angewachsen sein auf $27136,03 \times 1,09 = 29578,27\text{€}$
- Die 20000€, die unser Projekt in zwei Jahren einbringt, zahlen wir an die Bank. Die Schuld hat dann noch eine Höhe von $29578,27 - 20000 = 9578,27$
- Diese Schuld wird ein halbes Jahr später angewachsen sein auf $9578,27 \times 1,09^{0,5} = 10000\text{€}$
- Die 10000€, die unser Projekt in 2,5 Jahren einbringt, zahlen wir an die Bank und unsere komplette Schuld ist beglichen.

VIDEO ANZEIGEN

Merke: etwas andere Kapitalwerte

Üblicherweise wird der Kapitalwert zum Betrachtungszeitpunkt $t=0$ berechnet. Er kann aber auch zu anderen Zeitpunkten gelten, z.B. bei Investitionen, die erst in Zukunft geplant sind. Dann wird er in Gleichungen natürlich nicht KW_0 genannt, sondern entsprechend KW_t .

Andere gängige Bezeichnungen für Kapitalwerte sind NPV_t (für Net Present Value) und das bekannte K_t (für Kapital wie üblich).

VIDEO ANZEIGEN

AI fragen



Tutor/in fragen



< Vorheriges Kapitel

Nächstes Kapitel >

6 Karteikarten in diesem Kapitel

6

Jetzt lernen

Zusammenfassung

Suchen



2.4 Barwert



Zusammenfassung:

1 Grundlagen

- 1.1 Zahlungsströme
- 1.2 Zeitrechnung
- 1.3 Typische Finanzinstrumente

2 Zeitwert des Geldes

- 2.1 Einführung
- 2.2 Zinsen
- 2.3 Endwert
- 2.4 Barwert
- 2.5 Unterjährige Verzinsung
- 2.6 Kapitalwert

3 Werte von Renten

4 Renditerechnung

5 Anhang

- 5.1 Cheatsheet


[Log out](#)

Formel: Barwert

Gegeben sind Endwert, Zinssatz und Dauer einer Anlage. Wie groß ist ihr Barwert, also ihr heutiger Wert?

$$K_0 = \frac{K_t}{q^t}$$

$$= \frac{K_t}{(1+r)^t}$$

Beispiel

An deinem 18. Geburtstag schenken deine Großeltern dir Geld. An deinem 67. Geburtstag willst du 200000€ auf deinem Konto haben. Du gehst davon aus, dass du dein Kapital durchgängig zu 4% Zinsen p.a. anlegen kannst. Wie viel Geld benötigst du hierfür?

$$t = 67 - 18$$

$$= 49 \text{ Jahre}$$

$$K_t = 200000\text{€}$$

$$q = 1 + r$$

$$= 1,04$$

$$K_0 = \frac{K_t}{q^t}$$

$$= \frac{200000\text{€}}{1,04^{49}}$$

$$\approx 29268,22\text{€}$$

D.h. du musst an deinem 18. Geburtstag 29268,22€ anlegen, um bis zum 67. Geburtstag die erhofften 200000€ angespart zu haben.

VIDEO ANZEIGEN

Merke: Verständnis der Konzepte

Den meisten fällt es recht leicht, das Konzept des Endwerts zu verstehen. Denn der **Endwert** zu einem bestimmten Zeitpunkt **in der Zukunft** ist einfach der Wert, den ich in der Zukunft auf dem Konto haben würde, wenn ich **heute** einen bestimmten Betrag zu einem bestimmten Zinssatz **anlegen** würde. Wenn ich also heute 1000€ anlegen würde und der Zinssatz wäre 5%, dann hätte ich nach zwei Jahren $1000 \cdot 1,05^2 = 1102,50\text{€}$, und das ist eben genau der Endwert von meinen 1000€.

Das Konzept des Barwerts ist jedoch nicht so leicht zu verstehen. Wenn ich weiß, dass ich in 3 Jahren 2000€ geschenkt bekommen werde und der Zinssatz beträgt 7%, dann ist mein Barwert rechnerisch $2000/1,07^3 = 1632,60\text{€}$. Doch was bedeutet das nun? Was bringt mir ein Barwert zum heutigen Zeitpunkt von 1632,60€, wenn ich die 2000€ ja erst in drei Jahren bekomme?

Man kann das so erklären:

- Gehe heute zur Bank und nimm einen Kredit über 3 Jahre auf

- Die Höhe des Kredits sollte genau 1632,60€ betragen
- Du bekommst also von der Bank heute 1632,60€ ausgezahlt und kannst dieses Geld verwenden, wie du möchtest (z.B. konsumieren)
- In 3 Jahren wirst du der Bank das Geld einschließlich Zinsen zurückzahlen müssen. Der Betrag, den du zurückzahlen musst, beträgt dann $1632,60\text{€} \cdot 1,07^3 = 2000\text{€}$
- Du bekommst ja in drei Jahren sowieso 2000€ geschenkt, dieses Geld kannst du dann verwenden, um exakt den Kredit zurückzuzahlen.

Daran sieht man, dass man das Geld, das man erst in 3 Jahren bekommt, auch schon heute ausgeben kann. Nur darf man eben nicht die kompletten 2000€ ausgeben, sondern nur den abgezinsten Betrag von 1632,60€, was genau der Barwert ist.

Der Barwert einer Zahlung gibt also an, wie viel ich **heute konsumieren** kann, wenn ich **in der Zukunft** einen bestimmten **Betrag erhalten** werde.

Man kann den Barwert auch als fairen Preis einer zukünftigen Zahlung auffassen. Im Beispiel haben wir gesehen, dass es fair ist, jemandem 1632,60€ zu leihen und in 3 Jahren 2000€ zurückzubekommen, wenn der Marktzins durchgängig 7% beträgt. Demjenigen mehr Geld zu leihen, wäre bei gleicher Rückzahlung nachteilig; weniger zu verleihen wäre profitabel. Barwerte sind somit eine wichtige Kennzahl, wenn zu entscheiden ist, ob ein Geschäft sich lohnt oder nicht.

VIDEO ANZEIGEN

Merke: veränderlicher Zinssatz

Es kann vorkommen, dass sich während einer Anlage der Zinssatz ändert. Die einschlägigen Formeln gehen jedoch von konstanten Zinssätzen aus. In solchen Fällen muss man daher die Zeitspannen, in denen die verschiedenen Zinssätze gelten, separat betrachten (d.h. bei Barwertberechnung separat abzinsen, bei Endwertberechnung separat aufzinsen).

Beispiel

Du legst bei deiner Bank einen Geldbetrag zu 3% Zinsen p.a. an. Nach 4 Jahren steigt der Zinssatz auf 5% p.a. Nach weiteren 6 Jahren, also in $t = 10$, hast du 18000€ auf dem Sparkonto. Wie groß war der ursprünglich angelegte Betrag?

Lösung:

Zunächst berechnen wir den Kontostand in $t = 4$. Wir wissen, dass dieser bei 6 Jahren Verzinsung zu 5% p.a. auf 18000€ wächst. Also gilt

$$\begin{aligned} K_4 &= \frac{K_{10}}{1,05^6} \\ &= \frac{18000\text{€}}{1,05^6} \\ &\approx 13431,88\text{€} \end{aligned}$$

Jetzt können wir den ursprünglichen Anlagebetrag berechnen, der im Laufe von 4 Jahren zu 3% Zinsen auf 13431,88€ angewachsen ist:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{K_4}{1,03^4} \\ &\approx \frac{13431,88\text{€}}{1,03^4} \\ &\approx 11934,04\text{€} \end{aligned}$$

VIDEO ANZEIGEN

< Vorheriges Kapitel

Nächstes Kapitel >

4 Karteikarten in diesem Kapitel

4

Jetzt lernen